FP Khouribga
Analyse II-S2

Pr. Mohamed CH-CHAOUI

Examen Juin 2022

Exercice 1. (*5 points*) Résoudre les équations différentielles suivantes

1. $x(1+\ln^2(x))y' + 2\ln(x)y = 1$ sur $]0,+\infty[$.(*1.5 pt*)
2. $y' - y = x^\alpha \exp(x)$, sur $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.(*1.5 pt*)
3. $x^2 + y^2 - 2xy\,y' = 0$ sur $\mathbb{R}$. Indication : Poser $z = y^2$. (*2 pt*)

Exercice 2. (*2 points*) L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnel á cette population. La population double tous les 80 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 3. (*3 points*)

1. Trouver les réels a, b, c verifiant
$$\frac{u}{(u^2-1)(u+1)} = \frac{a}{u-1} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1+u)^2},$$
2. Appliquer les régles de Bioches pour calculer
$$\int \frac{1}{\sin(t)+\tan(t)}dt$$

Exercice 4. (*4 points*)

1. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{2u^2+u+2}du$
2. Poser $u = \tan(t/2)$, montrer que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+\sin(t)}dt = \frac{\pi}{\sqrt{15}}$.

Exercice 5. (*4 points*)

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{ch(t)}$ convergent et calculer leur valeur.
2. Calculer les limites des suites suivantes
$$U_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \ \alpha > 0, \ \ V_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Exercice 6. (*2 points*) Soit $p > 1$ et $q > 1$ deux réels, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que si f et g deux fonctions continues de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, alors
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Indication : Utiliser l'inégalité $\alpha\beta \leqslant \dfrac{\alpha^p}{p} + \dfrac{\beta^q}{q}$ pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$